به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

پاییز ۱۴۰۲

قضایای اسلاید Elementary Row Operations

مثال ۱

ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. حال موارد زیر را می خواهیم به دست آوریم:

- ستون j ام ماتریس را نمایش دهید.
- سطر i ام ماتریس را نمایش دهید.
- جمع برداری سطر های ماتریس A را بنویسید.
- جمع برداری ستون های ماتریس A را بنویسید.

- $a_j = \begin{bmatrix} a_{۱j} \\ a_{۲j} \end{bmatrix}$
- $a_i^T = \begin{bmatrix} a_{i۱} & a_{i۲} & a_{i۳} \end{bmatrix}$
- $Row\ Sum = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$
- $Column\ Sum = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$

قضیه ۱

ماتریس های $A,\ B,\ C$ روی F Field را در نظر بگیرید. می دانیم BC و $A(BC)$ وجود دارند. حال ثابت کنید AB و $(AB)C$ نیز وجود دارند و همچنین $(AB)C \ = \ A(BC)$

ماتریس $B_{n\times p}$ را در نظر بگیرید. از آنجایی که ضرب ماتریسی BC تعریف شده است، پس میدانیم که ماتریس C دارای p سطر است. از طرفی با توجه به اینکه ضرب ماتریسی $A(BC)$ نیز تعریف شده است و ماتریس BC دارای n سطر است، پس ماتریس $A_{m\times n}$ را نیز میتوانیم در نظر بگیریم. حال با توجه به ابعاد ماتریس ها، می دانیم ضرب ماتریسی AB و C(AB) نیز تعریف شده است. در ادامه برای اثبات تساوی ضرب ماتریسی $(AB)C = A(BC)$ می توانیم ضرب ماتریسی را بسط دهیم. برای نشان دادن تساوی ضرب ماتریسی، کافیست نشان دهیم برای هر درایه دلخواه نیز این تساوی برقرار است.

$$\begin{aligned}
[A(BC)]_{ij} &= \sum_r A_{ir}(BC)_{rj} \\
&= \sum_r A_{ir} \sum_s B_{rs}C_{sj} \\
&= \sum_r \sum_s A_{ir}B_{rs}C_{sj} \\
&= \sum_s \sum_r A_{ir}B_{rs}C_{sj} \\
&= \sum_s \left(\sum_r A_{ir}B_{rs} \right) C_{sj} \\
&= \sum_s (AB)_{is}C_{sj} \\
&= [(AB)C]_{ij}
\end{aligned}$$

قضیه ۲

ثابت کنید معکوس یک $Elementary\ row\ operation$ وجود دارد و یک $Elementary\ row\ operation$ از همان نوع است.

میخواهیم نشان دهیم برای یک $elementary\ row\ operation$ مانند e یک $elementary\ row\ operation$ دیگر مانند e_1 وجود دارد به طوری که:
$e_1(eA) = e(e_1A) = A$

سه نوع $elementary\ row\ operation$ داریم و برای هر سه معکوسش را نشان خواهیم داد:

(آ) فرض کنید عملیات سطری ابتدایی e سطر r ام ماتریس A را در اسکالر غیر صفر c ضرب می کند. می توانیم e_1 را یک عملیات سطری ابتدایی در نظر بگیریم که سطر r ام ماتریس A را در اسکالر c^{-1} ضرب می کند. می دانیم با انجام این عملیات در کنار عملیات سطری ابتدایی e ماتریس A تغییری نخواهد کرد و این دو عملیات یکدیگر را خنثی خواهند کرد.

(ب) فرض کنید عملیات سطری ابتدایی e سطر r ام ماتریس A را با سطر s ام آن جا به جا می کند. عملیات سطری ابتدایی e_1 را دقیقا برابر با e در نظر می گیریم. در نتیجه آن را خنثی می کند و معکوسش است.

(ج) فرض کنید عملیات سطری ابتدایی e سطر r ام ماتریس A را با c برابر سطر $s \neq r$ جمع می کند و در سطر r ام قرار می دهد. عملیات سطری ابتدایی e_1 را به این صورت در نظر می گیریم که سطر r ام ماتریس A را با $-c$ برابر سطر s ام جمع می کند و در سطر r قرار می دهد. این عملیات نیز معکوس e خواهد بود.

در نتیجه معکوس یک عملیات سطری ابتدایی وجود دارد و از همان نوع است.

مثال ۲

تمام ماتریس های ابتدایی ۲ × ۲ را بنویسید.

- $(c \neq 0)$ $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$: $Scaling$
- $\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$: $Replacement$
- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$: $Interchange$

قضیه ۳

اگر e یک عملیات سطری ابتدایی باشد و E یک ماتریس ابتدایی $m \times m$ است به طوری که $E = e(I)$. حال ثابت کنید برای هر ماتریس $A_{m\times n}$ داریم: $e(A) = EA$

برای هر سه نوع عملیات سطری ابتدایی، ماتریس EA را بسط می دهیم و تساوی را به دست می آوریم

(آ) $$Scaling: \; E_{ik} = \left\{ \begin{array}{ll} I_{ik} & \text{if } i \neq r \\ c \times I_{ik} & \text{if } i = r \end{array} \right\}, \; (EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj} = \left\{ \begin{array}{ll} A_{ik} & \text{if } i \neq r \\ c \times A_{ik} & \text{if } i = r \end{array} \right\}$$

(ب) $$Replacement: \; E_{ik} = \left\{ \begin{array}{ll} I_{ik} & \text{if } i \neq r \\ I_{rk} + c \times I_{sk} & \text{if } i = r \end{array} \right\}, \; (EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj} = \left\{ \begin{array}{ll} A_{ik} & \text{if } i \neq r \\ A_{rk} + c \times A_{sk} & \text{if } i = r \end{array} \right\}$$

(ج) $$Interchange: \; E_{ik} = \left\{ \begin{array}{ll} I_{sk} & \text{if } i = r \\ I_{rk} & \text{if } i = s \\ I_{ik} & \text{else} \end{array} \right\}, \; (EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj} = \left\{ \begin{array}{ll} A_{sk} & \text{if } i = r \\ A_{rk} & \text{if } i = s \\ A_{ik} & \text{else} \end{array} \right\}$$

در همه موارد بالا، نتیجه به دست آمده از حاصل ضرب EA برابر با اعمال عملیات سطری ابتدایی e روی ماتریس A است.

قضیه ۴

ماتریس های $A_{m\times n}$ و $B_{m\times n}$ روی F Field را در نظر بگیرید. آنگاه ماتریس B معادل سطری ماتریس A است اگر و تنها اگر $B = PA$ به طوری که ماتریس P حاصل ضرب ماتریس های ابتدایی است.

(آ) ماتریس $P = E_s \dots E_۲E_۱$ به طوری که هر کدام از E_i ها یک ماتریس ابتدایی $m \times m$ هست را در نظر بگیرید. می دانیم $E_۱A$ معادل سطری A است. همچنین $E_۲(E_۱A)$ نیز معادل سطری $E_۱A$ و در نتیجه معادل سطری A است. بر اساس قضیه ۱ که می گوید $A(BC) = (AB)C$ و ادامه دادن همین روند به این نتیجه میرسیم که $(E_s \dots E_۲E_۱)A = PA = B$. در نتیجه ماتریس B معادل سطری ماتریس A می باشد.

(ب) حال فرض کنید B معادل سطری A است. در ادامه $E_۱, E_۲, \dots, E_s$ را دنباله ای از ماتریس های ابتدایی در نظر میگیریم که ماتریس A را به ماتریس B تبدیل می کنند. در نتیجه $B = (E_s \dots E_۱)A = PA$ خواهد بود.

قضیه ۵

اگر ماتریس های $A_{m\times n}$ و $B_{m\times n}$ معادل سطری یکدیگر باشند. آنگاه اثبات کنید دستگاه معادلات همگن خطی $Ax=0$ و $Bx=0$ دارای جواب دقیقا یکسان هستند.

فرض کنید با یک سری محدود از عملیات های سطری ابتدایی از A به B مطابق رو به رو میرویم. $A \rightarrow A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow ... \rightarrow A_k = B$ حال برای اثبات قضیه بالا کافیست اثبات کنیم که دستگاه معادلات همگن خطی $A_jx=0$ و $A_{j+1}x=0$ دارای جواب دقیقا یکسان هستند. یا به بیانی دیگر، اعمال یک عملیات سطری ابتدایی، جواب دستگاه معدلات را تغییر نخواهد داد. فارغ از نوع عملیات سطری ابتدایی انجام شده، میدانیم هر معادله در دستگاه $A_{j+1}x=0$ ترکیبی خطی از معادلات دستگاه $A_jx=0$ خواهد بود. طبق قضیه ۲، معکوس هر عملیات سطری ابتدایی وجود دارد، پس هر معادله در دستگاه $A_jx=0$ نیز ترکیبی خطی از معادلات دستگاه $A_{j+1}x=0$ خواهد بود. در نتیجه این دو دستگاه معادل یکدیگر هستند و بر اساس قضیه ۶ دارای مجموعه جواب یکسان خواهند بود.

مثال ۳

جواب دستگاه معادله همگن رو به رو را بیابید. $A = \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

به کمک عملیات های سطری ابتدایی سعی میکنیم ماتریس A را ساده تر کنیم:

$$\begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 = R_1 + R_3]{R_2 = R_2 + i \times R_3} \begin{bmatrix} 0 & i+2 \\ 0 & 3+2i \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 = \frac{1}{i+2} \times R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3+2i \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 = R_2 - (3+2i) \times R1]{R_3 = R_3 - 2 \times R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

حال جواب های معادله بر اساس ماتریس نهایی $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$ خواهد بود.

قضیه ۶

دستگاه های معادلات خطی معادل، دارای مجموعه جواب دقیقا یکسان هستند.

دستگاه های معادل می توانند به وسیله سه عملیات زیر از یکدیگر به دست آیند.

- ضرب یک معادله در اسکالر غیر صفر
- جمع کردن ضریبی از یک معادله با معادله دیگر
- جا به جایی دو معادله

حال دو دستگاه خطی معادل را در نظر میگیریم و فرض می کنیم $x = (x_۱, \ ... \ x_n)$ جوابی برای دستگاه اول است. کافیست ثابت کنیم که این، جوابی برای دستگاه دوم نیز خواهد بود. اثبات به این صورت انجام می شود که باید نشان دهیم اعمال هر یک از سه عملیات بالا بر روی یک دستگاه معادلات خطی، جواب آن را تغییر نخواهد داد.

- ضرب کردن اسکالر صرفا معادله را اسکیل می کند و جواب را تغییر نمی دهد
- با اضافه کردن ضریبی از یک معادله به معادله دیگر، معادله جدیدی ایجاد نمی شود و از آنجایی که جواب قبلی برای هر یک از دو معادله صدق می کرد، برای معادله جدید نیز صدق خواهد کرد، پس مجموعه جواب تغییری نمی کند.
- با جا به جایی معادلات، جواب تغییری نمی کند زیرا ترتیب معادلات در حل آنها تاثیری ندارد

با توجه به سه مورد بالا، دستگاه های معادلات خطی معادل، دارای مجموعه جواب دقیقا یکسان خواهند بود.